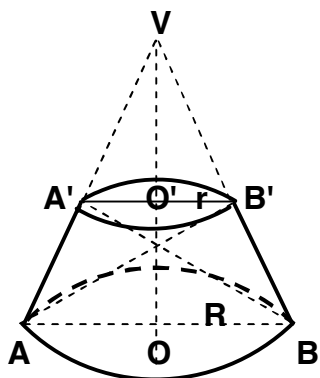
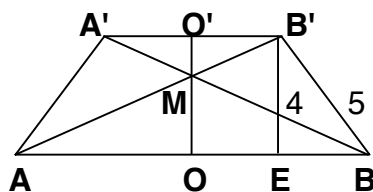


M. TRUNCHIUL DE CON CIRCULAR DREPT - PROBLEME REZOLVATE

1) Un trunchi de con circular drept are aria laterala $25\pi \text{ cm}^2$, inaltimea 4 cm si generatoarea 5 cm .
 Se cere: **a)** Aria si volumul trunchiului; **b)** Aria laterala si volumul conului din care provine trunchiul
c) Daca in trunchi se inscriu 2 conuri care au ca baze bazele trunchiului si generatoarele unuia in prelungirea generatoarelor celuilat, calculati volumele celor 2 conuri.



REZOLVARE



$$\mathbf{a) Al = \pi(R + r) \cdot G \Rightarrow \pi(R + r) \cdot 5 = 25\pi \Rightarrow R + r = 5}$$

$$\text{In } \Delta B'EB, m\angle E = 90^\circ \Rightarrow EB^2 = B'B^2 - B'E^2 \Rightarrow EB^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow EB = 3\text{cm} \Rightarrow R - r = 3$$

$$\begin{cases} R + r = 5 \\ R - r = 3 (+) \end{cases}$$

$$2R = 8 \Rightarrow R = 4 \text{ cm} \Rightarrow r = 1 \text{ cm}$$

$$\mathbf{At = Al + A_B + A_b}$$

$$A_B = \pi R^2 = 16\pi \text{ cm}^2, A_b = \pi r^2 = \pi \text{ cm}^2$$

$$\mathbf{At = 25\pi + 16\pi + \pi = 42\pi \text{ cm}^2; V = \frac{\pi H}{3} (R^2 + r^2 + R \cdot r) = \frac{\pi \cdot 4}{3} (16 + 1 + 4) = 28\pi \text{ cm}^3.$$

$$\mathbf{b) \Delta VO'B' \sim \Delta VOB \Rightarrow \frac{VO'}{VO} = \frac{O'B'}{OB} = \frac{VB'}{VB} \Rightarrow \frac{VO-4}{VO} = \frac{1}{4} = \frac{VB-5}{VB} \Rightarrow 4(VO-4) = VO \Rightarrow VO = \frac{16}{3} \text{ cm}$$

$$4(VB-5) = VB \Rightarrow VB = \frac{20}{3} \text{ cm} \Rightarrow \mathbf{Al_{CON} = \pi R \cdot VB = \frac{80\pi}{3} \text{ cm}^2, V_{CON} = \frac{\pi R^2 \cdot VO}{3} = \frac{256\pi}{9} \text{ cm}^3.$$

c) Pentru a obtine cele 2 conuri se duc diagonalele sectiunii axiale a trunchiului de con \Rightarrow

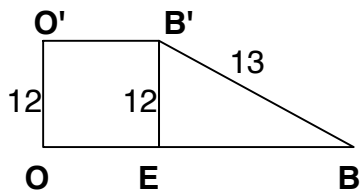
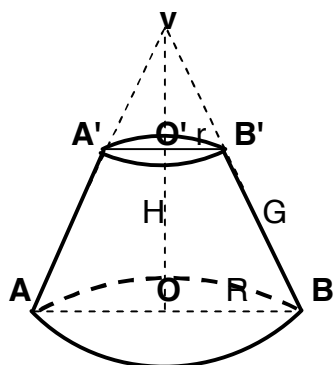
$$\text{conul MA'B' si conul MAB. Volumul lui MA'B' = } \frac{\pi r^2 \cdot MO'}{3}, \text{ iar Volumul lui MAB = } \frac{\pi R^2 \cdot MO}{3}$$

$$\Delta AMO \sim \Delta AB'E \Rightarrow \frac{MO}{B'E} = \frac{AO}{AE} \Rightarrow \frac{MO}{4} = \frac{4}{5} \Rightarrow MO = \frac{16}{5} \text{ cm} \Rightarrow MO' = 4 - \frac{16}{5} \Rightarrow MO' = \frac{4}{5} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \mathbf{Volumul conului MAB = \frac{256\pi}{15} \text{ cm}^3; Volumul conului MA'B' = \frac{4\pi}{15} \text{ cm}^3.$$

2) Un trunchi de con are inaltimea 12cm, aria laterala $169\pi \text{ cm}^2$, si generatoarea egala cu suma razelor bazelor. Se cere: **a)** Volumul trunchiului de con ; **b)** Volumul conului din care provine trunchiul

REZOLVARE



$$\begin{aligned} EB &= OB - OE = R - r \\ O'O &= H = 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

a) $Al = \pi(R + r) \cdot G \Rightarrow \pi(R + r) \cdot G = 169\pi \Rightarrow (R + r) \cdot G = 169$

Dar $R + r = G$; Din $(R + r) \cdot G = 169 \Rightarrow G \cdot G = 169 \Rightarrow G = 13 \text{ cm} \Rightarrow R + r = 13 \text{ cm}$

In $\Delta B'EB$, $m\angle E = 90^\circ \Rightarrow EB^2 = B'B^2 - B'E^2 = 169 - 144 = 25 \Rightarrow EB = 5 \text{ cm} \Rightarrow R - r = 5 \text{ cm}$

$$\begin{cases} R + r = 13 \\ R - r = 5 (+) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 9 \\ 9 + r = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 9 \text{ cm} \\ r = 4 \text{ cm} \end{cases}$$

$$2R = 18 \Rightarrow R = 9$$

$$V_{\text{TRUNCHI}} = \frac{\pi H(R^2 + r^2 + R \cdot r)}{3} = \frac{\pi \cdot 12(81 + 16 + 36)}{3} = \pi \cdot 4 \cdot 133 = 532\pi \text{ cm}^3$$

b) $V_{\text{con}} = \frac{\pi \cdot R^2_{\text{con}} \cdot H_{\text{con}}}{3}$

$R_{\text{con}} = R_{\text{TRUNCHI}} = OB = 9 \text{ cm}$

$H_{\text{con}} = VO$

$$\Delta VO'B' \sim \Delta VOB \Rightarrow \frac{VO'}{VO} = \frac{O'B'}{OB} \Rightarrow \frac{VO - 12}{VO} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9(VO - 12) = 4VO \Rightarrow 9VO - 108 = 4VO \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9VO - 4VO = 108 \Rightarrow 5VO = 108 \Rightarrow VO = \frac{108}{5} \text{ cm}$$

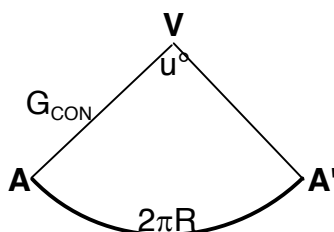
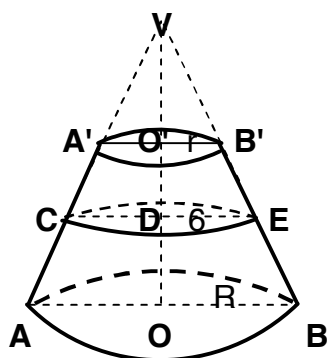
$$V_{\text{con}} = \frac{\pi \cdot 9^2 \cdot \frac{108}{5}}{3} = \pi \cdot 81 \cdot \frac{108}{5 \cdot 3} = \frac{2916\pi}{5} \Rightarrow V_{\text{con}} = \frac{2916\pi}{5} \text{ cm}^3.$$

3) Un trunchi de con are volumul $312\pi \text{ cm}^3$ și înălțimea 8cm. Se sectionează trunchiul cu un plan paralel cu bazele, care trece prin mijlocul înălțimii lui. Aria secțiunii este $36\pi \text{ cm}^2$.

a) Dacă notăm raza bazei mici a trunchiului cu r , arătați că $r^2 - 12r + 27 = 0$;

b) Calculați măsura arcului sectorului de cerc care reprezintă desfășurarea conului din care provine trunchiul.

REZOLVARE



a) Dacă aria secțiunii cu raza DE este $36\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow \pi \cdot DE^2 = 36\pi \Rightarrow DE=6 \text{ cm}$. $O'O=8 \text{ cm}$.

$$V_{\text{trunchi}} = \frac{\pi \cdot O'O}{3} (R^2 + r^2 + R \cdot r) \Rightarrow \frac{8\pi(R^2 + r^2 + R \cdot r)}{3} = 312\pi \Rightarrow R^2 + r^2 + R \cdot r = 117$$

În trapezul $OBB'O'$, DE este linie mijlocie $\Rightarrow DE = \frac{O'B' + OB}{2} \Rightarrow 6 = \frac{r + R}{2} \Rightarrow R + r = 12 \Rightarrow R = 12 - r$

$$(12 - r)^2 + r^2 + (12 - r) \cdot r - 117 = 0 \Rightarrow 144 - 24r + r^2 + r^2 + 12r - r^2 - 117 = 0 \Rightarrow r^2 - 12r + 27 = 0$$

b) Din $r^2 - 12r + 27 = 0$. $r^2 - 3r - 9r + 27 = 0 \Rightarrow r(r-3) - 9(r-3) = 0 \Rightarrow (r-3)(r-9) = 0 \Rightarrow r-3=0 \Rightarrow r=3 \Rightarrow R=9$

$$\Delta VO'B' \sim \Delta VOB \Rightarrow \frac{VO'}{VO} = \frac{O'B'}{OB} \Rightarrow \frac{VO-8}{VO} = \frac{3}{9} \Rightarrow 9(VO-8) = 3VO \Rightarrow 9VO - 72 = 3VO \Rightarrow VO = 12 \text{ cm}$$

În ΔVOB , $\angle O = 90^\circ \Rightarrow VB^2 = VO^2 + OB^2 \Rightarrow VB^2 = 144 + 81 = 225 \Rightarrow VB = 15 \text{ cm} \Rightarrow G_{\text{CON}} = 15 \text{ cm}$

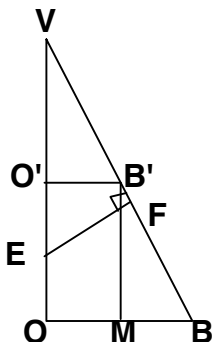
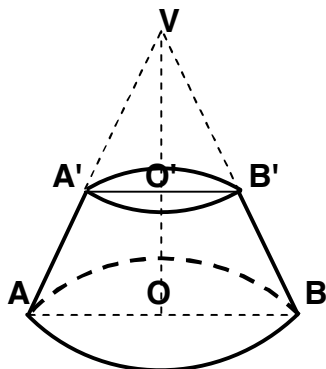
$$u^\circ \dots \dots R \quad 360^\circ \cdot R$$

$$360^\circ \dots \dots G_{\text{CON}} \Rightarrow u^\circ = \frac{\quad}{G_{\text{CON}}}$$

$$u = \frac{360 \cdot 9}{15} = 72^\circ$$

4) Volumul unui trunchi de con circular drept este $126\pi \text{ cm}^3$, iar aria bazei mici reprezinta 6,25% din aria bazei mari. **a)** Calculati volumul conului din care provine trunchiul de con ; **b)** Daca inaltimea trunchiului este 18 cm calculati aria trunchiului de con; **c)** Calculati distanta de la mijlocul inaltimei trunchiului de con la o generatoare.

REZOLVARE



$$\text{a) } \frac{6,25}{100} \cdot A_B \Rightarrow \pi r^2 = \frac{625}{10000} \cdot \pi R^2 \Rightarrow \frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{1}{4} \Rightarrow R = 4r$$

$$\text{conul } VA'B' \sim \text{conul } VAB \Rightarrow \frac{V_{\text{CON } VA'B'}}{V_{\text{CON } VAB}} = \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

$$\frac{V_{\text{con } VAB} - V_{\text{trunchi}}}{V_{\text{con } VAB}} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_{\text{CON } VAB} - 126\pi}{V_{\text{CON } VAB}} = \frac{1}{64} \Rightarrow$$

$$64 \cdot V_{\text{CON } VAB} - 8064\pi = V_{\text{CON } VAB} \Rightarrow V_{\text{CON } VAB} = 128\pi \text{ cm}^3.$$

b)

$$V_{\text{TRUNCHI}} = \frac{\pi \cdot H}{3} (R^2 + r^2 + R \cdot r) \Rightarrow 126\pi = \frac{\pi \cdot 18}{3} (16r^2 + r^2 + 4r^2) \Rightarrow 21r^2 = 21 \Rightarrow r = 1 \text{ cm} \Rightarrow R = 4 \text{ cm}$$

$$\text{In } \Delta B'MB, \angle M = 90^\circ, MB = R - r = 3 \text{ cm}, B'M = 18 \text{ cm} \Rightarrow B'B^2 = B'M^2 + MB^2 = 324 + 9 = 333 \Rightarrow$$

$$B'B = 3\sqrt{37} \text{ cm} \Rightarrow A_l = \pi(R + r) \cdot G = \pi(4 + 1) \cdot 3\sqrt{37} \Rightarrow A_l = 15\sqrt{37}\pi \text{ cm}^2.$$

c)

$$\Delta VO'B' \sim \Delta VOB \Rightarrow \frac{VO'}{VO} = \frac{O'B'}{OB} \Rightarrow \frac{VO - 18}{VO} = \frac{1}{4} \Rightarrow VO = 24 \text{ cm}; \Delta VFE \sim \Delta VOB \Rightarrow \frac{EF}{OB} = \frac{VE}{VB}$$

$$\text{In } \Delta VOB, m\angle O = 90^\circ \Rightarrow VB^2 = VO^2 + OB^2 = 576 + 16 = 592 \Rightarrow VB = 4\sqrt{37} \text{ cm}$$

$$VE = VO - EO = 24 - 9 \Rightarrow VE = 15 \text{ cm}$$

$$EF = \frac{OB \cdot VE}{VB} = \frac{4 \cdot 15}{4\sqrt{37}} \Rightarrow EF = \frac{15\sqrt{37}}{37} \text{ cm}$$