A. OPERAȚII CU NUMERE REALE

A1. NOTIUNI TEORETICE.

1. <u>Regula semnelor ; ordinea efectuării operațiilor.</u>

•**Regula semnelor la <u>suma algebrică</u> :**

1. Dacă numerele au **același semn se adună** și rezultatului se dă semnul care îl au numerele
Ex. a) –4 –5 –3 = -12 ; b) –1 –4 – 5 = - 10 ; c) 4 + 3 + 5 = 12

2. Dacă numerele au **semne opuse se scad** și se dă semnul <u>numărului</u> mai mare
Ex. a) –6 +4 = - 2 ; b) 8 – 12 = - 4 ; c) –8 + 10 = +2 ; d) 12 – 10 = 2

Obs. La o sumă algebrică cu mai multe numere în prima etapă se adună numerele pozitive apoi se pune semnul minus și se adună numerele negative iar în etapa a doua se pune semnul <u>numărului</u> mai mare și se scad cele două numere obținute.
Ex. a) <u>4</u> – 5 <u>+ 6</u> <u>+ 4</u> – 3 – 2 <u>+ 5</u> = +19 – 10 = + 9 ;
b) –4 – 6 <u>+ 3</u> <u>+ 2</u> – 10 <u>+ 5</u> = + 10 – 20 = - 10

• **Regula semnelor la <u>înmulțire și împărțire :</u>**

1. Dacă numerele au **același semn** rezultatul operației este **pozitiv.**

2. Dacă numerele au **semne opuse** rezultatul operației este **negativ.**
Sau : (+) · (+) = + ; (-) · (-) = + ; (+) · (-) = - ; (-) · (+) = -
Ex. a) (- 4) · (-5) = +20 ; b) (-24) : 8 = - 3 ; c) 8 · (-4) = - 32 ; d) (-15) : (-5) = +3

Obs. La un șir de mai multe înmulțiri și <u>împărțiri</u> consecutive mai întâi se înmulțesc semnele și se trece semnul rezultat apoi se efectuează operațiile dintre numere în ordine de la stânga la dreapta.

Se mai poate observa că dacă <u>numărul</u> de semne (-) este **par** rezultatul va fi **pozitiv** , iar dacă este **impar** rezultatul va fi **negativ**. Ex. a) (+4) · (-12) : 6 · (-2) = + 16 b) **–** (-4) · (-5) · (-3) : 10 : (-3) = - 2

• La efectuarea unui calcul cu mai multe operații mai întâi se efectuează <u>ridicările</u> la putere și radicalii apoi înmulțirile și <u>împărțirile</u> și în final suma algebrică.

• Într-un șir de calcule se grupează înmulțirile și <u>împărțirile</u> apoi se efectuează ,obținându-se pentru fiecare grupare un <u>număr</u>, după care se face suma algebrică a numerelor obținute.

• La efectuarea calculelor cu mai multe tipuri de paranteze mai întâi se efectuează calculele din parantezele rotunde apoi din cele drepte și în final din acolade.

Ex.a) – (-3)·(+4) – (-15):(-5) + (-4)·(-2):(-8) = +12 –3 –1 = 8
b) –(-2)·(-4):(-8) + 2 · 4: 8 – 1 = +1+1-1=1
c) 33 - 3:[1 +26:(3·5 - 4:2)] -16 = 33 – 3:[1 + 26:(15 - 2)] -16 = 33 – 3 :(1+ 26:13) –16
= 33 – 3:3 –16 = 33 –1-16 = 33 – 17 = 16

2. Operații cu fracții ; transformări.

Obs. La efectuarea calculelor în care apar fracții , numere zecimale , numere periodice , mai întâi se iau separat numere zecimale și periodice , se transformă în fracții după care se înlocuiesc în exercițiu și se efectuează calculele cu fracții.

- **Transformarea numerelor zecimale în fracții:**

Ex $0{,}05 = \frac{5^{(5}}{100} = \frac{1}{20}$; $1{,}025 = \frac{1025^{(25}}{1000} = \frac{41}{40}$; $12{,}5 = \frac{125^{(5}}{10} = \frac{25}{2}$

- **Transformarea numerelor periodice în fracții :**

Ex. $0{,}1(7) = \frac{17-1}{90} = \frac{16^{(2}}{90} = \frac{8}{45}$; $4{,}2(72) = \frac{4272-42}{990} = \frac{4230^{(10}}{990} = \frac{423^{(9}}{99} = \frac{47}{11}$

$2{,}1(3) = \frac{213-21}{90} = \frac{192^{(6}}{90} = \frac{32}{15}$; $321{,}(6) = \frac{3216-321}{9} = \frac{2895}{9}$

- **Introducerea întregilor în fracție:**

$2\frac{5}{6} = \frac{2\cdot 6+5}{6} = \frac{12+5}{6} = \frac{17}{6}$; $13\frac{75}{100} = 13\frac{75^{(25}}{100} = 13\frac{3}{4} = \frac{13\cdot 4+3}{4} = \frac{52+3}{4} = \frac{55}{4}$

Obs. La suma algebrică de mai multe fracții mai întâi se aduce fiecare fracție la o formă mai simplă dacă este posibil , apoi se găsește numitorul comun (prin aflarea c.m.m.m.c. al numitorilor fracțiilor) , după care se amplifică fiecare fracție (cu un număr care rezultă din împărțirea numitorului comun la numitorul fracției respective), iar în final se fac înmulțirile și sumele algebrice de la numărător.

Ex. a) $\frac{6}{12} + \frac{5}{15} + \frac{4}{24} = \frac{6^{(6}}{12} + \frac{5^{(5}}{15} + \frac{4^{(4}}{24} = \frac{^{3)}1}{2} + \frac{^{2)}1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3+2+1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$

b) $\frac{5}{72} + \frac{11}{48} - \frac{5}{18} = \frac{^{2)}5}{72} + \frac{^{3)}11}{48} - \frac{^{8)}5}{18} = \frac{10+33-40}{144} = \frac{43-40}{144} = \frac{3^{(3}}{144} = \frac{1}{48}$

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$72 = 2^3 \cdot 3^2 \quad / 2$

$48 = 2^4 \cdot 3 \quad / 3$

$18 = 2 \cdot 3^2 \quad / 2^3$

N.C. $= 2^4 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$

Obs. La înmulțirea și împărțirea fracțiilor mai întâi se transformă împărțirea în înmulțire (când se transformă semnul împărțirii în semnul înmulțirii fracția de după semn se inversează), apoi se fac simplificările după care se fac înmulțirile și dacă este cazul suma algebrică.

$$\frac{16}{81} - \frac{16}{81} \cdot \frac{9}{4} : \frac{4}{9} = \frac{16}{81} - \frac{16}{81} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{16}{81} - \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{9}{4} = \frac{16}{81} - \frac{1}{1} = -\frac{65}{81}$$

3. Operații cu puteri.Modulul.

Proprietățile ridicării la putere:

a) $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a .... \cdot a$ $\qquad$ $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

$a^0 = 1$; $1^n = 1$ $\qquad$ $18002^0 = 1$; $1^{1999} = 1$

b) $(-a)^n = \mathbf{+\,a^n}$ dacă n este **număr par** $\qquad$ $(-2)^4 = +\,2^4 = 16$

$(-a)^n = \mathbf{-\,a^n}$ dacă n este **număr impar** $\qquad$ $(-2)^5 = -\,2^5 = -32$

c) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ $\qquad$ $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$; $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$

d) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad$ $2^{25} \cdot 2 = 2^{25+1} = 2^{26}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$ $\qquad$ $2^{200} : 2^{198} = 2^{200-198} = 2^2 = 4$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\qquad$ $(2^5)^{10} = 2^{5 \cdot 10} = 2^{50}$

e) $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ $\qquad$ $2^{100} \cdot 3^{100} = (2 \cdot 3)^{100} = 6^{100}$

$a^m : b^m = (a : b)^m$ $\qquad$ $15^{10} : 5^{10} = (15 : 5)^{10} = 3^{10}$

Ex. a) $[(2 \cdot 2^2 \cdot 2^{300} + 3^{60} : 3^{20} \cdot 3^{30} - (5^5)^{100}] - [4^{303} : 6^{303} \cdot 3^{303} + 6^{70} : 2^{70} - (5^{20})^{20} \cdot (5^{10})^{10}] =$

$= (2^{1+2+300} + 3^{60-20+30} - 5^{5 \cdot 100}) - [(4:6 \cdot 3)^{303} + (6:2)^{70} - 5^{20 \cdot 20} \cdot 5^{10 \cdot 10}] =$

$= (2^{303} + 3^{70} - 5^{500}) - [(4 \cdot \dfrac{1}{6} \cdot 3)^{303} + 3^{70} - 5^{400} \cdot 5^{100}) = (2^{303} + 3^{70} - 5^{500}) - (2^{303} + 3^{70} - 5^{500}) = 0$

b) $2^{-3} : 4^{-2} - (-2)^{-3} \cdot (-3)^{-3} \cdot 6^3 + [(-2)^{-2}]^{-1} - (-2)^{-2} = \dfrac{1}{2^3} : \dfrac{1}{4^2} - \dfrac{1}{(-2)^3} \cdot \dfrac{1}{(-3)^3} \cdot 6^3 + (-2)^{(-2)\cdot(-1)} - \dfrac{1}{(-2)^2} =$

$\dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{16}{1} - \dfrac{1}{[(-2)\cdot(-3)]^3} \cdot 6^3 + (-2)^2 - \dfrac{1}{4} = 2 - \dfrac{1}{6^3} \cdot 6^3 + 4 - \dfrac{1}{4} = 2 - 1 + 4 - \dfrac{1}{4} = {}^{4)}5 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{20-1}{4} = \dfrac{19}{4}$

Proprietățile modulului:

a) $|a| = a$ dacă $a > 0$; $|a| = -\,a$ dacă $a < 0$; $|a| = 0$ dacă $a = 0$

$|12| = 12$; $|-4| = 4$; $|0| = 0$; $-\,|-4| = -\,4$; $-\,|6| = -\,6$

b) **$|a| \leq c$ dacă** $-c \leq a \leq c$ deci $\mathbf{a \in [-c\,;\,+c]}$

c) **$|a| \geq c$ dacă** $a \leq -c$ și $a \geq c$ deci $\mathbf{a \in (-\infty; -c] \cup [c; +\infty)}$

d) $|a - b| = a - b$ dacă $a > b$ și $|a - b| = b - a$ dacă $b > a$

$\mathbf{|\sqrt{3} - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - \sqrt{3}}$; $\mathbf{|2\sqrt{3} - \sqrt{11}| = |\sqrt{12} - \sqrt{11}| = \sqrt{12} - \sqrt{11}}$